Universität Zürich[UZH]

Philosophisches Seminar

Einführung in die formale Logik I

Frühjahrssemester 2019

Vorlesung 6

Prof. Dr. Katia Saporiti

Achtung:
Am 8. April keine Logik-Vorlesung (Sechseläuten)!

Aussagenlogik / Junktorenlogik (*propositional logic*)

- Die aussagenlogische Sprache AL
  - Die Syntax von AL
    - Grundsymbole
    - Formeln und (unmittelbare) Teilformeln in AL
    - Klammerkonventionen
  - Die Semantik von AL
    - Bewertungen
    - Boolesche Bewertungen
    - Atomare Bewertungen
  - Semantische Begriffe für AL
  - Wahrheit und logische Wahrheit
  - Schlüsse, Prämissen und Konklusionen (Folie nicht gezeigt)
- Polnische Notation (Folie nicht gezeigt)

Die aussagenlogische Sprache AL – Syntax

1. Die Grundsymbole (das Vokabular) von AL

a. Eine unendliche Menge von **Satzkonstanten** (auch Satzvariablen genannt)
„p", „q", „r", „s", ..., „z", „z_1", „z_2",..., „z_n"

b. Logische Konstanten (**Junktorensymbole**)

i. „ ¬ " (für die Negation), *„Haken"*
ii. „ ∧ " (für die Konjunktion), *„Hütchen"*
iii. „ ∨ " (für die Adjunktion), *„kleines V"*
iv. „ → " (für das Konditional), *„Pfeil"*
v. „ ↔ " (für das Bikonditional); *„Doppelpfeil"*

c. **Klammern** „(" und „)" als Hilfszeichen.

Anmerkung: Im Rahmen der Syntax von AL werden die Junktorensymbole als Zeichen eingeführt, ohne dass ihnen bereits irgendeine Bedeutung zukäme. (Die Wahrheitstafeln sind nicht Teil von AL.) Die Bedeutung der Junktorensymbole ergibt sich erst aus der Semantik von AL.

... die aussagenlogische Sprache AL – Syntax (Fortsetzung)

2. Formeln und (unmittelbare) Teilformeln in AL

a. Rekursive (induktive) Definition der **Formeln** (Sätze) von AL

F_0: Jede Satzkonstante ist eine Formel.
F_1: Ist X eine Formel, dann auch ¬X.
F_2: Sind X und Y Formeln, dann sind auch (X∧Y), (X∨Y), (X→Y) und (X↔Y) Formeln.
F_3: Nichts sonst ist eine Formel.

Anmerkung: „X" und „Y" sind metasprachliche Zeichen für (beliebig komplexe) AL-Formeln, keine Zeichen oder Ausdrücke von AL.

*AL ist hier die **Objektsprache** – die Sprache, über die wir reden. Das um einige Mitteilungszeichen und Ausdrücke erweiterte Deutsch unsere **Metasprache** – die Sprache, in der wir über die Objektsprache AL reden.*

*Während „X" und „Y" in dieser Anmerkung nur **erwähnt** werden, werden sie in F_1 und F_2 als Mitteilungszeichen für AL-Formeln **verwendet**.*

... die aussagenlogische Sprache AL – Syntax (Fortsetzung)

b. Rekursive Definition einer **unmittelbaren Teilformel** in AL

UT_0: Satzkonstanten haben keine unmittelbaren Teilformeln;

UT_1: Die Formel ¬X hat die unmittelbare Teilformel X;

UT_2: Die Formeln (X∧Y), (X∨Y), (X→Y) und (X↔Y) haben die unmittelbaren Teilformeln X und Y und sonst keine.

Beispiele: Formeln und ihre unmittelbaren Teilformeln

(1) ((p ∧ q) → q)	(1): {(p ∧ q), q}
(2) ((p ∧ q) → (r → s))	(2): {(p ∧ q), (r → s)}
(3) ((p ∨ q) → (r ∨ (p → X)))	(3): ist keine Formel ! („X" ist kein Zeichen von AL)
(4) (¬(p ∧ q) → ¬r)	(4): {¬(p ∧ q), ¬r}

... die aussagenlogische Sprache AL – Syntax (Fortsetzung)

c. Rekursive Definition einer **Teilformel** in AL:

T_0: X ist eine Teilformel von X;

T_1: Jede unmittelbare Teilformel von X ist eine Teilformel von X;

T_2: Wenn X eine Teilformel von Y und Y eine Teilformel von Z ist, dann ist X eine Teilformel von Z.

Beispiele: Formeln und ihre Teilformeln

(1) ((p ∧ q) → q)	(1) : { ((p ∧ q) → q), (p ∧ q), q, p}
(2) ((p ∧ q) → (r → s))	(2) : { ((p ∧ q) → (r → s)), (p ∧ q), (r → s), p, q, r, s}
(3) ((p ∨ q) → r ∨ p → s)	(3) : keine Formel ! (fehlende Klammern)
(4) (¬(p ∧ q) → ¬r)	(4) : {(¬(p ∧ q) → ¬r), ¬(p ∧ q), ¬r, (p ∧ q), r, p, q}

... die aussagenlogische Sprache AL – Syntax (Fortsetzung)

3. Klammerkonventionen in AL

i. Wenn in der Folge „¬, ∧, ∨, →, ↔" der Junktor j_1 links von j_2 steht, so soll j_1 enger binden als j_2.
(Die Bindungsstärke nimmt von links nach rechts ab: ¬ bindet stärker als ∧, ∧ stärker als ∨, ∨ stärker als →, → stärker als ↔.)

ii. Klammern, die demnach überflüssig sind, *können* weggelassen werden.

iii. Äußere Klammern *können* weggelassen werden.

	Beispiel	wird zu:	wird zu:
(1)	(p → q)	p → q	
(2)	((¬p ∧ q) ∨ r)	(¬p ∧ q) ∨ r	¬p ∧ q ∨ r
(3)	(¬p ∧ (q ∨ r))	¬ p ∧ (q ∨ r)	

Zusatz: Erläuterung des Begriffs des Hauptoperators

Hauptoperatoren sind Junktoren, die in AL-Formeln wie folgt vorkommen:

H_1: Der Junktor ¬ ist der Hauptoperator der Formel ¬X;

H_2: Die Junktoren ∧, ∨, →, ↔ sind jeweils Hauptoperatoren der Formeln (X∧Y), (X∨Y), (X→Y) und (X↔Y).

(Anmerkung: „X" und „Y" sind auch hier Metazeichen für beliebige AL-Formeln.)

Formeln werden nach ihrem jeweiligen dem Hauptzeichen (bzw. dem Hauptoperator) als *(negierte) Konjunktionen*, *Adjunktionen*, *Konditionale (oder materiale Implikationen)* und *Bikonditionale* bezeichnet.

Beispiele:

(1)	¬p ∧ q ∨ r	*(Adjunktion)*	(4)	¬((p ∧ q) → ¬r)	*(negiertes Konditional)*
(2)	¬(p ∧ (q ∨ r))	*(negierte Konjunktion)*	(5)	((p ∧ q) → (r → s))	*(Konditional)*
(3)	((p ∧ q) → q)	*(Konditional)*	(6)	(¬(p ∧ q) → ¬r)	*(Konditional)*
(4)	¬p ∧ (q ∨ r)	*(Konjunktion)*	(7)	p ↔ ¬q → r ∧ s	*(Bikonditional)*

Exkurs I: Meta- und Objektsprache

- Eine ***Objektsprache*** ist eine Sprache, über die wir reden.
- Eine ***Metasprache*** ist eine Sprache, in der wir über eine Sprache reden.
- Die Unterscheidung zwischen einer Objekt- und einer Metasprache ist immer auf einen bestimmten Kontext bezogen.
- Vorsicht! Es gibt nur wenige Zusammenhänge, in denen die Unterscheidung zwischen einer Objekt- und einer Metasprache überhaupt sinnvoll d.h. zweckdienlich ist. (Die unten stehenden Übungsbeispiele gehören nicht dazu, die Anmerkungen zur Definition der AL-Formel und zum Begriff des Hauptoperators hingegen schon.)

Beispiele:	*Objektsprache:*
1. Die Grammatik des Englischen ist relativ einfach.	*1. Englisch*
2. Latein ist eine agglutinierende Sprache.	*2. Latein*
3. Im Französischen gibt es keinen Ablativ.	*3. Französisch*
4. Im Deutschen gibt es viele Fremdwörter.	*4. Deutsch*
5. Die aussagenlogische Sprache AL ist denkbar einfach.	*5. AL*

(In 1. bis 4. ist Deutsch die Metasprache, in 5. das um den Eigennamen „AL" erweiterte Deutsch.)

Exkurs II: Verwenden und Erwähnen

(1) Der Bauer beschloss, Hühner in Zukunft Katzen zu nennen.
In Zukunft würden seine Katzen daher Eier legen.

(2) Beende niemals einen Satz mit der Präposition mit.

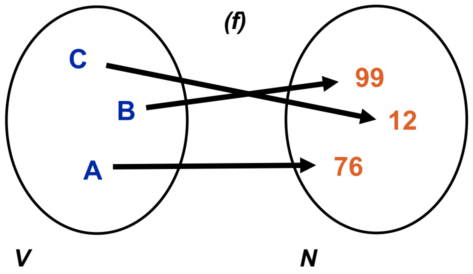
Um Missverständnisse, Fehler oder sogar Paradoxien zu vermeiden, ist es manchmal wichtig, zwischen dem ***Verwenden*** und dem ***Erwähnen*** eines sprachlichen Ausdrucks zu unterscheiden. Dies kann z.B. durch eine Kursivierung, Unterstreichung oder die Anführung der nur erwähnten Ausdrücke geschehen.

(3) Das Buch hat einen grünen Umschlag.
(4) „Buch" ist ein Wort mit vier Buchstaben.
(5) Das Wort mit den vier Buchstaben ist leicht auszusprechen.
(6) *Systematizität* hingegen ist ein Zungenbrecher.
(7) Paul gibt es sowohl im Englischen als auch im Deutschen.
(8) Der Goldfisch Paul fühlt sich pudelwohl.

(In 3. wird das Wort „Buch" verwendet, in 4. wird es erwähnt.)
(In 5. werden alle Wörter verwendet, in 6. wird „Systematizität" erwähnt.)
(In 7. wird der Name Paul erwähnt, in 8. wird er verwendet.)

Exkurs III: Funktionen

- Seien ***V*** und ***N*** Mengen, dann ordnet eine ***Funktion*** *von* ***V*** *nach* ***N*** jedem Element von ***V*** genau ein Element von ***N*** zu.
- Wenn ***f*** eine Funktion von ***V*** nach ***N*** ist, dann heisst ***V*** der ***Vor-***, ***Argument-*** oder ***Definitionsbereich*** von ***f***, und ***N*** heißt der ***Nach-*** oder ***Wertebereich*** von ***f***.
- Elemente von ***V*** heißen ***Argumente***, Elemente von ***N*** heißen ***Werte***.



f *nimmt für die Argumente aus* ***V*** *folgende Werte an:*

f(A) = 76

f(B) = 99

f(C) = 12

Die Semantik der aussagenlogischen Sprache AL

1. Bewertungen

Sei ***M*** eine Menge aussagenlogischer Formeln. Dann wird eine Funktion ***b***, die jedem Element aus ***M*** genau einen der beiden Wahrheitswerte (***w*** oder ***f***) zuordnet, eine ***Bewertung*** über ***M*** genannt.

Sei ***X*** eine beliebige aussagenlogische Formel. Dann gilt:

X ist wahr unter ***b*** gdw. b(X)=w und ***X*** ist falsch unter ***b*** gdw. b(X)=f.

Den Wert b(X), den X unter der Bewertung b erhält (annimmt), nennt man den ***Wahrheitswert von X unter der Bewertung b***.

Die innerhalb der Standardlogiken erhobene Forderung, dass jeder Formel (jedem Satz von AL) genau einer der beiden Wahrheitswerte zugeordnet ist, wird als ***Bivalenzprinzip*** bezeichnet.

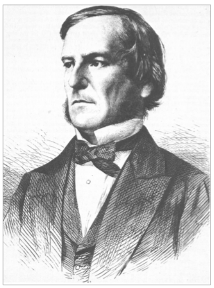
Aussagenlogische Bewertungen sind Funktionen aus beliebigen Mengen aussagenlogischer Formeln in die Menge {w, f}.

2. Boolesche Bewertungen

Als Bewertungen für Mengen von Formeln interessieren uns in der Logik nicht beliebige Bewertungen, sondern nur solche, die den Rollen wahrheitsfunktionaler Operatoren normaler Sprachen entsprechen.

Anders ausgedrückt geht es uns um solche Bewertungen, die in Einklang mit den Wahrheitstafeln für die Junktoren stehen. Solche Bewertungen nennen wir „Boolesche Bewertungen“ (nach George Boole, 1815-1864).

Eine Bewertung ***b*** über der Menge ***A*** aller AL-Formeln ist genau dann eine **Boolesche Bewertung**, wenn für alle Elemente ***X***, ***Y*** aus ***A*** gilt:



b_1:	$b(\neg X) = w$	genau dann, wenn	$b(X) = f$;
	$b(\neg X) = f$	genau dann, wenn	$b(X) = w$.
b_2:	$b(X \wedge Y) = w$	genau dann, wenn	$b(X) = b(Y) = w$;
	$b(X \wedge Y) = f$	genau dann, wenn	$b(X) = f$ oder $b(Y) = f$ oder beides.
b_3:	$b(X \vee Y) = w$	genau dann, wenn	$b(X) = w$ oder $b(Y) = w$ oder beides;
	$b(X \vee Y) = f$	genau dann, wenn	$b(X) = b(Y) = f$.
b_4:	$b(X \rightarrow Y) = w$	genau dann, wenn	$b(X) = f$ oder $b(Y) = w$ oder beides;
	$b(X \rightarrow Y) = f$	genau dann, wenn	$b(X) = w$ und $b(Y) = f$.
b_5:	$b(X \leftrightarrow Y) = w$	genau dann, wenn	$b(X) = b(Y) = w$ oder $b(X) = b(Y) = f$;
	$b(X \leftrightarrow Y) = f$	genau dann, wenn	$b(X) = w$ und $b(Y) = f$ oder wenn $b(X) = f$ und $b(Y) = w$.

... die Semantik der aussagenlogischen Sprache AL (Fortsetzung)

... 2. Boolesche Bewertungen (Fortsetzung)

(Boolesche Bewertungen sind also

– Funktionen (Zuordnungen, die allen Elementen einer Menge jeweils genau ein Element einer anderen Menge zuordnen)
– von der Menge aller AL-Formeln in die Menge mit den Wahrheitswerten wahr und falsch,
– die die Booleschen Bedingungen b_1 bis b_5 respektieren (Bedingungen für die fünf Junktorensymbole von AL (Häkchen, Hütchen, kleines v, Pfeil und Doppelpfeil)

Die junktorenlogischen Symbole der aussagenlogischen Sprache AL erhalten erst mit einer Booleschen Bewertung die Bedeutung der wahrheitsfunktionalen Satzoperatoren Negation, Konjunktion, Adjunktion, Konditional und Bikonditional.)

3. Atomare Bewertungen

Eine ***atomare Bewertung*** über der Menge ***A*** aller AL-Formeln ist eine Bewertung für die Menge der in ***A*** enthaltenen Satzkonstanten.

Jede atomare Bewertung über *A* lässt sich zu genau einer Booleschen Bewertung erweitern; und umgekehrt enthält jede Boolesche Bewertung über *A* genau eine atomare Bewertung.

Semantische Begriffe für AL

Für alle AL-Formeln X, Y (Elemente der Menge A aller AL-Formeln) und jede Menge M von AL-Formeln gilt:

a. X ist **logisch wahr** (tautologisch, eine Tautologie) gdw. X unter jeder Booleschen Bewertung über A wahr ist. (Wir schreiben: „$\vdash$X".)

Beispiele: (i) $\vdash p\lor\neg p$ (ii) $\vdash (p\land\neg p)\rightarrow q$ (iii) $\vdash \neg(p\leftrightarrow\neg p)$

b. X ist **erfüllbar** gdw. es (mindestens) eine Boolesche Bewertung über A gibt, unter der X wahr ist.

Beispiele: (i) $p\lor q$ (ii) $p\rightarrow q$ (iii) $\neg p$ (iv) p

c. X ist **unerfüllbar** (kontradiktorisch, eine Kontradiktion) gdw. es keine Boolesche Bewertung über A gibt, unter der X wahr ist.

Beispiele: (i) $p\land\neg p$ (ii) $\neg(p\land\neg p\rightarrow q)$ (iii) $\neg(p\lor\neg p)$ (iv) $(p\leftrightarrow\neg p)$

d. X **folgt aus** Y (Y impliziert X) gdw. X unter jeder Booleschen Bewertung über A wahr ist, unter der Y wahr ist. (Wir schreiben: „Y$\Rightarrow$X ")

Beispiele: (i) $p\Rightarrow p$ (ii) $p\land q \Rightarrow p$ (iii) $p\lor q \Rightarrow \neg(\neg p\land\neg q)$

... Semantische Begriffe für AL (Fortsetzung)

e. M ist **erfüllbar** (konsistent) gdw. es (mindestens) eine Boolesche Bewertung über A gibt, unter der alle in M enthaltenen Formeln wahr sind.

Beispiele: (i) $\{p\}$ (ii) $\{p, q\}$ (iii) $\{p\land q\}$

f. M ist **unerfüllbar** (inkonsistent) gdw. es keine Boolesche Bewertung über A gibt, unter der alle in M enthaltenen Formeln wahr sind.

Beispiele: (i) $\{p\land\neg p\}$ (ii) $\{\neg(p\land\neg p\rightarrow q)\}$ (iii) $\{\neg(p\lor\neg p)\}$ (iv) $\{p,\neg p, r, \neg s\}$

g. X **folgt aus** M (M impliziert X) gdw. X unter jeder Booleschen Bewertung über A wahr ist, unter der alle in M enthaltenen Formeln wahr sind. (Wir schreiben: „M$\Rightarrow$X")

Beispiele: (i) $\{p, q\} \Rightarrow p$ (ii) $\{(p\rightarrow q),\neg q\} \Rightarrow \neg p$ (iii) $\{p, q, r\} \Rightarrow (p\land q)\land r$

h. X und Y sind **äquivalent** gdw. X unter jeder Booleschen Bewertung über A wahr ist, unter der auch Y wahr ist, und umgekehrt Y unter jeder Booleschen Bewertung über A wahr ist, unter der X wahr ist (also gdw. X und Y unter denselben Booleschen Bewertungen über A wahr sind). (Wir schreiben: „X$\Leftrightarrow$Y".)

Beispiele: (i) $(p\rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p\lor q)$ (ii) $p \Leftrightarrow p$ (iii) $(p\leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p\rightarrow q)\land(q\rightarrow p)$

Wahrheit & logische Wahrheit

Es gelten folgende Zusammenhänge (X und Y seien beliebige AL-Formeln):

$X \Rightarrow Y$ gdw. $\vdash X \rightarrow Y$

$X \Leftrightarrow Y$ gdw. $\vdash X \leftrightarrow Y$

$X \Leftrightarrow Y$ gdw. $X \Rightarrow Y$ und $Y \Rightarrow X$

Dass eine AL-Formel X **wahr** ist, bedeutet (nur), dass X unter einer bestimmten Booleschen Bewertung über A wahr ist (X ist relativ zu dieser Bewertung wahr).

Dass X (aussagen-)**logisch wahr** ist, bedeutet dagegen, dass X unter allen Booleschen Bewertungen über A wahr ist (X ist allein aufgrund seiner (aussagen-)logischen Struktur wahr).

$X \rightarrow Y$ kann also wahr sein, ohne logisch wahr zu sein (ohne eine Tautologie zu sein), so dass Y keineswegs aus X folgt.

Umgekehrt aber gilt: Wenn $X \rightarrow Y$ logisch wahr ist (also eine Tautologie ist), dann muss $X \rightarrow Y$ unter jeder Booleschen Bewertung über A wahr sein, und Y folgt aus X.

Schlüsse, Prämissen, Konklusionen

Wenn (X,Y und Z AL-Formeln sind und) Z die Konklusion eines gültigen Schlusses mit den Prämissen X und Y ist, dann

- folgt Z aus {X,Y}

  also gilt: $\{X,Y\} \Rightarrow Z$

- folgt Z aus der Konjunktion der Prämissen

  also gilt: $(X \wedge Y) \Rightarrow Z$

- ist $X \wedge Y \rightarrow Z$ eine Tautologie

  also gilt: $\vdash X \wedge Y \rightarrow Z$

  (Beachte: Man kann nicht schreiben „$\vdash \{X,Y\} \rightarrow Z$", denn $\{X,Y\} \rightarrow Z$ ist keine AL-Formel und daher nach der obigen Definition keine aussagenlogische Tautologie.)

Polnische Notation

Nach einer Idee des polnischen Logikers Jan Łukasiewicz (1878-1956) kann man aussagenlogische Formeln ohne Klammern schreiben, wenn man die Symbole mehrstelliger Junktoren vor ihre Argumente schreibt (also z.B. „∧pq“ statt „p∧q“).

Um diese Notation von der bereits eingeführten AL-Notation deutlich zu unterscheiden, verwenden wir anstelle der Junktorensymbole „¬“, „∧“, „∨“, „→“ und „↔“ die Buchstaben „N“, „K“, „A“, „C“ und „B“.

¬q	*wird zu:*	Nq
p ∧ q	*wird zu:*	Kpq
p ∨ q	*wird zu:*	Apq
p → q	*wird zu:*	Cpq
p ↔ q	*wird zu:*	Bpq

(1)	¬p ∧ q	*wird zu:*	KNpq
(2)	p ∨ ¬q	*wird zu:*	ApNq
(3)	¬p ∧ ¬q	*wird zu:*	KNpNq
(4)	¬(p ∨ q)	*wird zu:*	NApq
(5)	¬(p → q)	*wird zu:*	NCpq
(6)	¬p → q	*wird zu:*	CNpq
(7)	¬p → ¬q	*wird zu:*	CNpNq
(8)	(p→q)∨p→q	*wird zu:*	CACpqpq

Fin